

CHAPITRE 3

ECHANTILLONNAGE

Claude E. Shannon (1916-2001), mathématicien et ingénieur électricien américain. Après deux thèses aux MIT, Shannon entra aux Bell Labs, en 1941, où il établit les fondements de la théorie de l'information. Il décrivit le premier la possibilité d'envoyer du son, du texte, et des images, par le biais d'un flux binaire (il est d'ailleurs l'inventeur du « bit », contraction de « binary digit »), dans un article magistral : "*A mathematical theory of communication*", Bell Labs Technical Journal, 1948. Il s'intéressa plus tard à l'intelligence artificielle, et fut un des premiers à programmer un jeu d'échecs.



La grande majorité des signaux numériques représentent en réalité des signaux analogiques sous-jacents, auxquels on veut pouvoir appliquer toute la puissance des traitements numériques. La conversion analogique-numérique est appelée *échantillonnage*. Nous étudierons dans ce chapitre l'interprétation spectrale de l'échantillonnage, et en déduirons l'expression du *théorème de Shannon*.

Nous examinerons de plus près les problèmes liés à la conception du filtre de garde, et introduirons l'interpolation-décimation ainsi que le sur-échantillonnage. Nous verrons de même comment reconstruire un signal analogique à partir de son homologue numérique, par extrapolation et lissage.

Nous concluons ce chapitre par l'examen du *théorème de Shannon généralisé* et de son application pour le filtrage en sous-bande.

3.1 Principe

Les signaux numériques peuvent être créés directement par un système numérique (un processeur, sous toutes ses formes actuelles). On parle alors de *synthèse numérique* (comme dans le cas de la synthèse d'images ou de sons numériques). La plupart du temps, cependant, ils sont obtenus par échantillonnage de signaux analogiques.

L'*échantillonnage* d'un signal analogique représenté par une fonction $f(t)$ consiste à construire, à partir de $f(t)$, un signal à temps discret $f(n) = f(nT_e)$ obtenu en mesurant la valeur de $f(t)$ toutes les T_e secondes (Fig. 3.1) :

$$f(n) = f(nT_e) \quad (3.1)$$

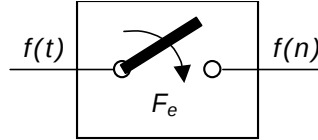


Fig. 3.1 Représentation schématique de l'échantillonnage

Si $f(t)$ subit une discontinuité par saut à un instant d'échantillonnage, on convient de poser :

$$f(n) = 1/2. [f(nT_e^+) + f(nT_e^-)] \quad (3.2)$$

Le schéma de principe de l'échantillonnage est décrit à la Fig. 3.2. Il exprime le fait qu'on peut considérer que $f^+(t)$ est obtenu par multiplication de $f(t)$ par un train d'impulsions de Dirac de période T_e :

$$f^+(t) = f(t)\delta_{T_e}(t) = \sum_n f(nT_e)\delta(t - nT_e) \quad (3.3)$$

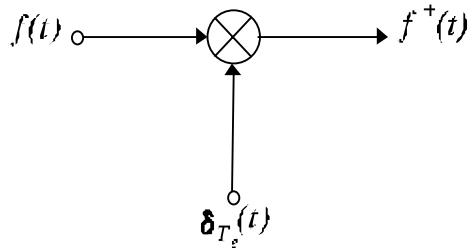


Fig. 3.2 Représentation mathématique de l'échantillonnage

On peut alors interpréter la transformée de Fourier $F^+(\omega)$ de $f^+(t)$ (c'est-à-dire la TFTD de $\{f(n)\}$) comme celle d'un produit, et en calculer la transformée de Fourier :

$$F^+(f) = F(f) * \left[\frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \right] = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(f - kf_e) \quad (3.4)$$

Nous savions déjà que la TFTD d'un signal échantillonné est périodique en f , de période f_e (ou, en F , de période 1). Nous comprenons maintenant que, lorsque le signal numérique est obtenu par échantillonnage d'un signal analogique, cette périodicité résulte de la superposition de toutes les translatées (à des multiples entiers de f_e) de la transformée de Fourier du signal original divisée par T_e .

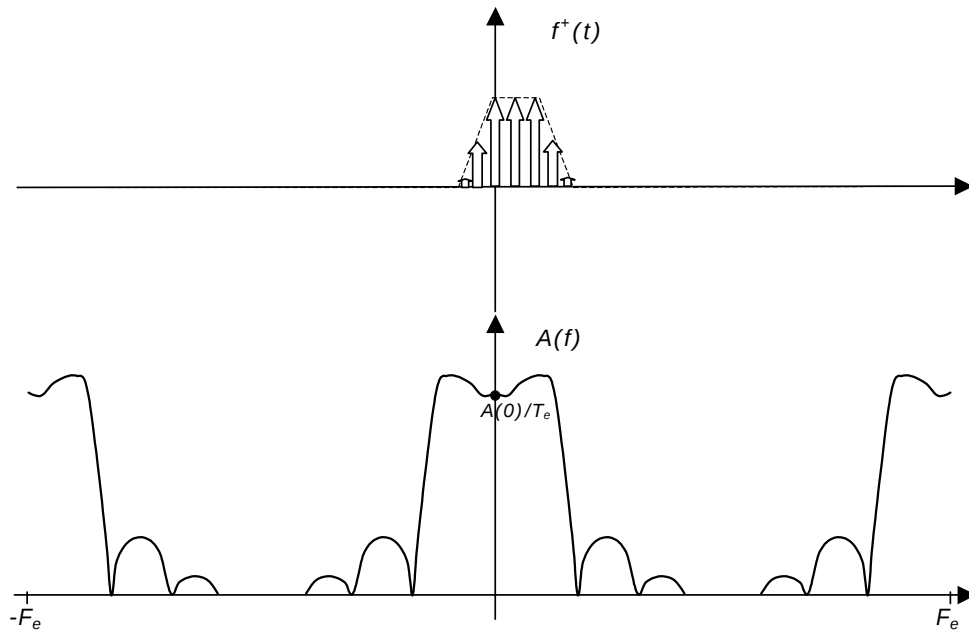
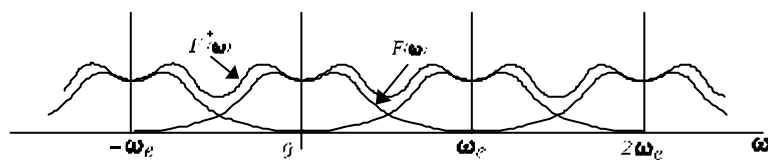


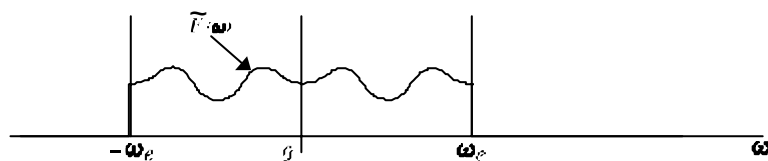
Fig. 3.3 Spectre d'un signal échantillonné

3.2 Recouvrement spectral (aliasing)

Si le spectre $F(f)$ du signal analogique $f(t)$ n'est pas nul au delà de f_e , la superposition (3.4) peut conduire à des empiètements des translatées (Fig. 3.4). Ce phénomène est appelé *recouvrement* (ou *repliement*) *spectral* (en anglais : *aliasing*).

Fig. 3.4 Phénomène de recouvrement¹

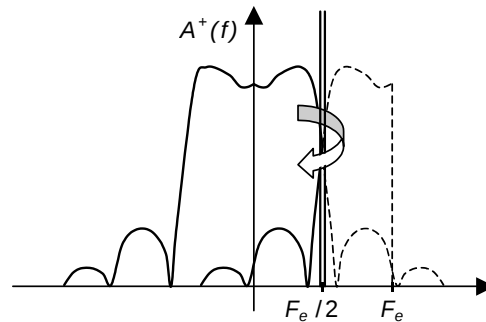
Le recouvrement spectral a pour conséquence que le signal à temps discret $f(n)$ obtenu par échantillonnage n'est plus une image correcte de $f(t)$, mais bien du signal $\tilde{f}(t)$ dont le spectre est donné par $F^+(f)$ entre $-f_e$ et $+f_e$ (Fig. 3.5).



¹ Ce graphique, ainsi que les deux suivants, est ici à des fins didactiques, mais il peut porter à confusion : en réalité, c'est le spectre *complexe* $F(\omega)$ qui est additionné à des translatées de lui-même, et pas le spectre d'amplitude.

Fig. 3.5 Spectre du signal analogique supposé

Le terme de *repliement spectral* est d'ailleurs tout à fait justifié (plus encore que celui de *recouvrement*). En effet, tout se passe comme si la partie de $F(f)$ inférieure à $f_e/2$ se trouvait additionnée à la partie de ce même $F(f)$ supérieure à $f_e/2$, repliée autour de $f_e/2$ et conjuguée (Fig. 3.6).

Fig. 3.6 Repliement spectral²

Exemple 3.1

On échantillonne une sinusoïde $f(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ à la fréquence d'échantillonnage de 10000 Hz. Dessinons l'allure des échantillons (c'est-à-dire l'allure de la fonction $f^+(t)$ correspondante) pour des valeurs de f_0 égales à : 1000 Hz, 2500 Hz, 5000 Hz, 7500 Hz, 9000 Hz, et 31000 Hz.

Pour que les graphiques possèdent des axes temporels identiques, choisissons de montrer les 10 premières ms des signaux (Fig. 3.7).

```
subplot(6,1,1); stem(sin(2*pi*1000*[0:99]/10000));
subplot(6,1,2); stem(sin(2*pi*2500*[0:99]/10000));
subplot(6,1,3); stem(sin(2*pi*5000*[0:99]/10000));
subplot(6,1,4); stem(sin(2*pi*7500*[0:99]/10000));
subplot(6,1,5); stem(sin(2*pi*9000*[0:99]/10000));
subplot(6,1,6); stem(sin(2*pi*31000*[0:99]/10000));
```

² Ce graphique est en réalité assez réducteur : non seulement ce ne sont pas les spectres d'amplitude qui s'additionnent (mais bien les spectres complexes), mais de plus l'opération de repliement est en réalité associée à la conjugaison de $F(f)$.

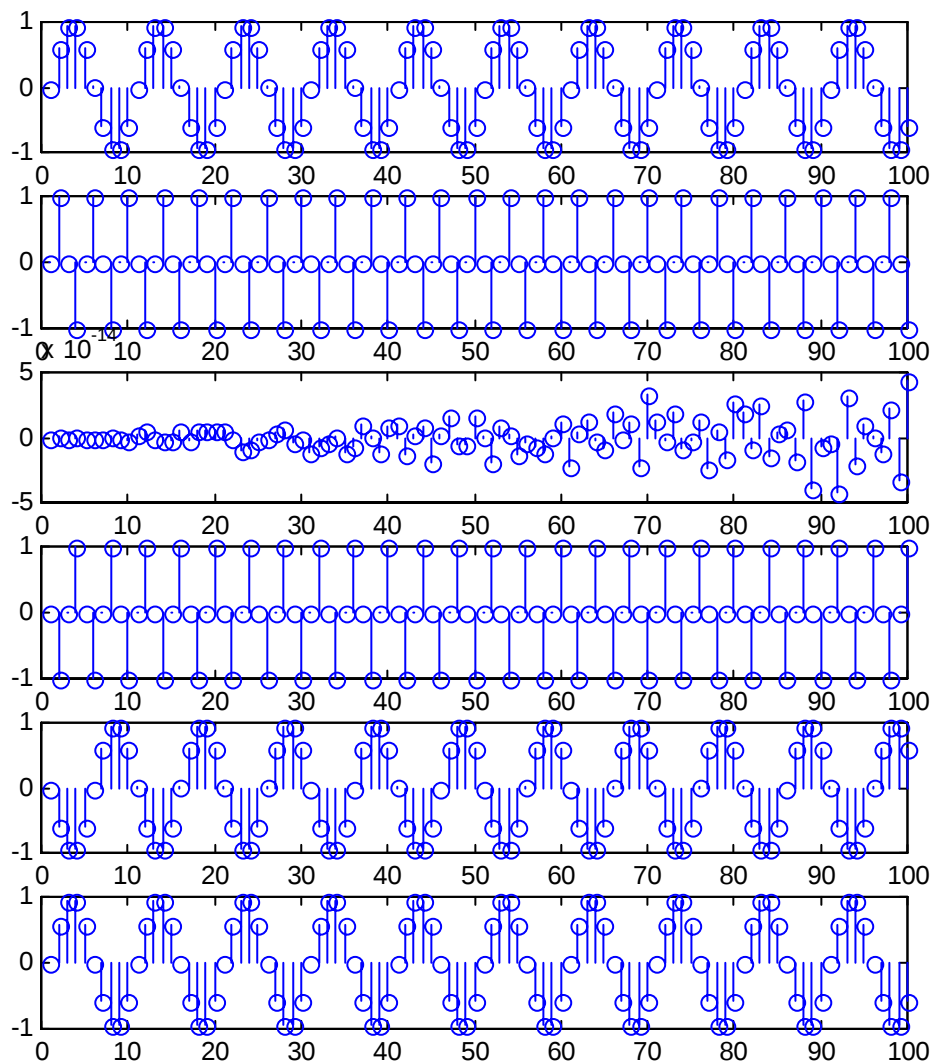


Fig. 3.7 Echantillonnage de sinusoïdes

On constate :

- ❑ Que seuls les échantillonnages des sinusoïdes à 1000 et 2500 Hz donnent une image réaliste des signaux sous-jacents (on peut retrouver la fréquence des sinusoïdes correspondantes en mesurant leur période sur le graphique).
- ❑ Que l'échantillonnage de la sinusoïde à 5000 Hz fait apparaître un signal d'amplitude très petite. En théorie, les échantillons devraient être tous nuls. Les valeurs non nulles apparaissant sur le graphique sont le résultat d'erreurs d'arrondis de Matlab.
- ❑ Que les échantillonnages des sinusoïdes à 7500 Hz et 9000 Hz donnent des résultats identiques (au signe près) à ceux des sinusoïdes à 2500 Hz et 1000 Hz. Il est par conséquent impossible, après échantillonnage, de retrouver la fréquence exacte des sinusoïdes sous-jacentes. C'est le résultat du repliement spectral des sinusoïdes de départ autour de la fréquence de Nyquist (5000 Hz).
- ❑ Que l'échantillonnage de la sinusoïde à 31000 Hz donne exactement le même résultat que celui d'une sinusoïde à 1000 Hz. C'est le résultat de la superposition de toutes les translatées (à des multiples entiers de f_e) de la transformée de Fourier du signal original.

Exemple 3.2

On cherche à calculer la transformée de Fourier de $rect_a(t)/2a$. On demande :

- de choisir la fréquence d'échantillonnage de façon que la valeur maximale de la transformée de Fourier de $rect_a(t)/2a$ soit affectée de moins de 1% d'erreur par repliement spectral (on suppose qu'il n'y a pas de filtre de garde);
- de vérifier ce résultat sous Matlab.

Il est clair qu'il y aura repliement spectral, quelle que soit la fréquence d'échantillonnage choisie. En effet, la transformée de Fourier de $rect_a(t)/a$ est donnée par :

$$rect_a(t)/a \stackrel{\mathbb{F}}{\Leftrightarrow} \frac{\sin(a\omega/2)}{a\omega/2}$$

Son enveloppe est donc donnée par $2/a\omega$. Le maximum du spectre se trouve en $f=0$ et vaut 1. Si l'on suppose que l'effet du repliement est surtout dû au premier spectre image à droite, qu'on approxime ce spectre par son enveloppe (Fig. 3.8), et qu'on suppose que l'amplitude du spectre résultant est la somme des amplitudes du spectre de base et de ce premier spectre image³, il vient :

$$|F(F_e)| < 0.01 \max(|F(f)|) = 0.01$$

$$2/(a2\pi F_e) < 0.01$$

$$F_e > 100/\pi a$$

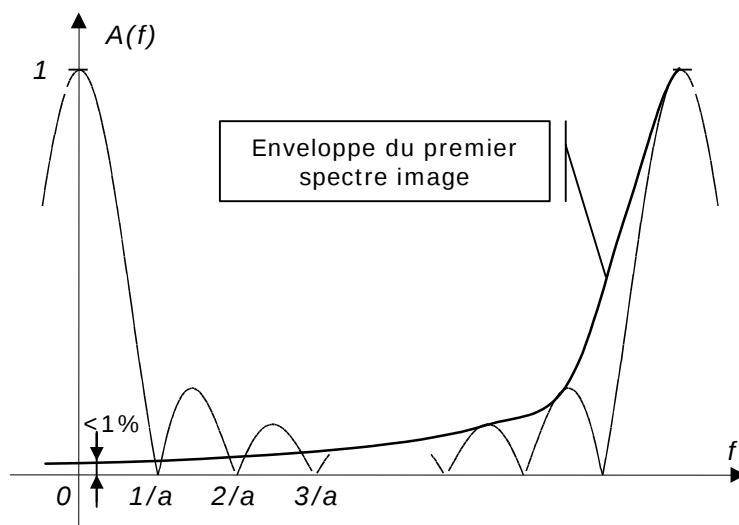


Fig. 3.8 Effet approximatif du repliement

Si on prend par exemple $a=1$ (ce qui correspond à un carré d'une seconde), on trouve à peu près $F_e > 30$. Comme chaque lobe a une largeur de 1Hz, on constate qu'il faut 30 lobes pour que l'erreur soit de moins de 1%.

Pour voir cet effet sous Matlab, on affiche la transformée $F^+(f)$ du signal obtenu par échantillonnage de $rect_1(t)$ à une fréquence largement supérieure à 30 Hz (ex : 300 Hz). Le signal est donc constitué de 300 échantillons égaux à 1. On constate que le spectre obtenu

³ En réalité la somme étant complexe, l'effet du recouvrement sera en général moindre que celui calculé ici.

est pratiquement exempt de repliement spectral entre 0 et 30 Hz, et correspond donc pratiquement à $F(f)$.

`freqz([ones(1,300)],1,0:1/10:30,300) % F(f) entre 0 et 30 Hz  $\Rightarrow$  30 lobes`

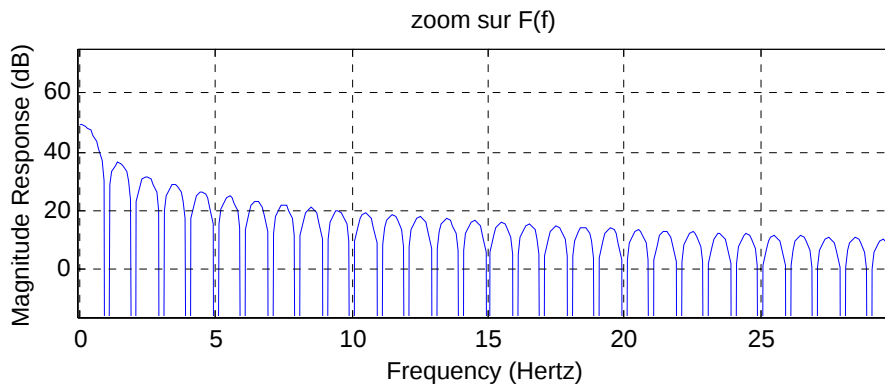


Fig. 3.9 Transformée de Fourier de $\text{rect}_1(t)$

On constate que l'enveloppe de $F(f)$ à 30 Hz est bien 40 dB sous $F(0)$ (c'est-à-dire 1% de $F(0)$).

Notons qu'en pratique, on ne connaît pas la transformée de Fourier que l'on cherche à calculer. Le calcul ci-dessus pour le choix de F_e est alors remplacé par une estimation itérative : partant d'une première valeur de F_e , on augmente progressivement F_e jusqu'à ce que la transformée de Fourier mesurée ne change plus beaucoup. On a alors atteint une valeur suffisante pour éviter le recouvrement spectral. Une alternative consiste à utiliser dès le départ une fréquence d'échantillonnage suffisamment élevée pour que la condition de non-recouvrement soit vérifiée à coup sûr.

3.3 Filtre de garde

On cherche donc en général à éviter ce phénomène, en faisant en sorte que le spectre de la fonction $f(t)$ soit à support borné $[-f_M, +f_M]$ avec $f_M < f_e/2$ (Fig. 3.10).

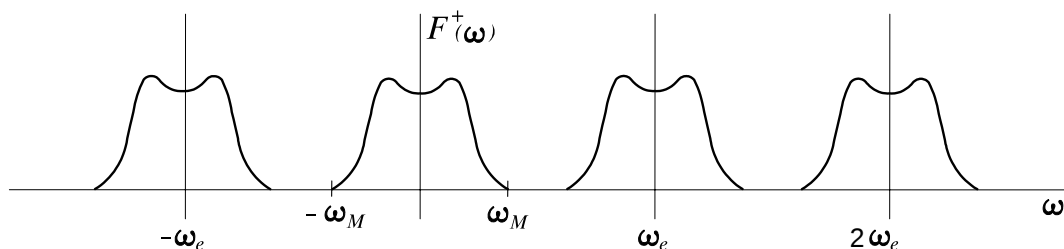


Fig. 3.10 Illustration du non-recouvrement

On sait cependant qu'une fonction dont le spectre est à support borné est illimitée dans le temps. Un signal physique n'est jamais illimité dans le temps et par conséquent son spectre n'est pas à support borné. Son échantillonnage provoque donc en principe toujours du recouvrement spectral. Par ailleurs, tout signal analogique est affecté par des bruits additifs, qui portent des composantes à haute fréquence. Ces bruits peuvent venir dégrader le spectre utile du signal par repliement spectral.

La condition de non recouvrement n'est donc en général pas vérifiée par les signaux usuels, ce qui implique la nécessité de faire précéder l'échantillonnage d'un filtre dont les spécifications seront définies pour vérifier la condition de non recouvrement; ce filtre sera appelé *filtre de garde* ou *filtre anti-repliement*. (Erreur ! Source du renvoi introuvable.).

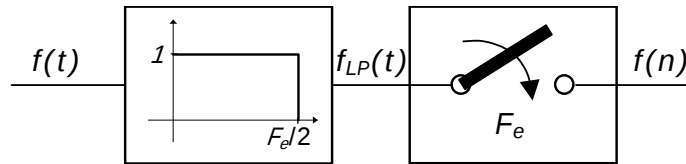


Fig. 3.11 Filtre de garde idéalisé

On commet toujours une certaine « erreur » en fixant la limite du spectre à $F_e/2$: les composantes du signal à plus haute fréquence ne sont pas prises en compte.⁴

3.4 Théorème de Shannon

Le *théorème de Shannon*, également appelé *théorème de l'échantillonnage*, est un des fondements du traitement numérique des signaux :

"Toute fonction $f(t)$ dont le spectre est à support borné ($F(f)=0$ pour $|f| > f_M$) est complètement définie par ses échantillons $f(nT_e)$ si $f_e \geq 2f_M$."

Ce théorème découle immédiatement de l'analyse précédente concernant le phénomène de recouvrement : l'échantillonnage à une fréquence f_e d'une fonction $f(t)$ qui respecte le théorème de Shannon ne produit pas de recouvrement spectral. Par conséquent, le signal original $f(t)$ peut être reconstitué par le filtrage du signal impulsionnel $f^+(t)$ par un passe-bas idéal de fréquence de coupure f_M (Fig. 3.12).

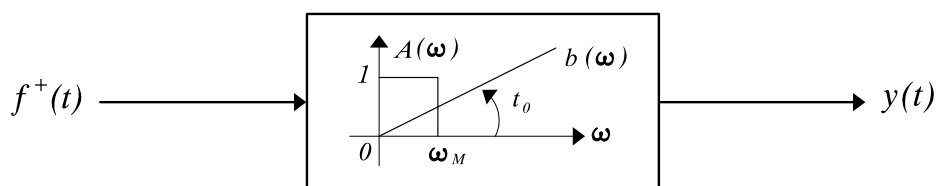


Fig. 3.12 Filtre de reconstitution

⁴ Cette erreur n'est pas nouvelle. Tout système de mesure analogique souffre du même inconvénient : les composantes des signaux mesurés supérieures à la bande passante du système de mesure ne sont pas prises en compte.

Cette opération de filtrage correspond à la convolution du signal $f^+(t)$ par la réponse impulsionnelle du filtre idéal, ce qui revient pratiquement à réaliser la somme des réponses impulsionnelles dues à chaque impulsion de $f^+(t)$:

$$f(t) = \sum_n f(nT_e) \cdot \frac{\sin[\omega_M \cdot (t - nT_e)]}{\omega_M \cdot (t - nT_e)} \quad (3.5)$$

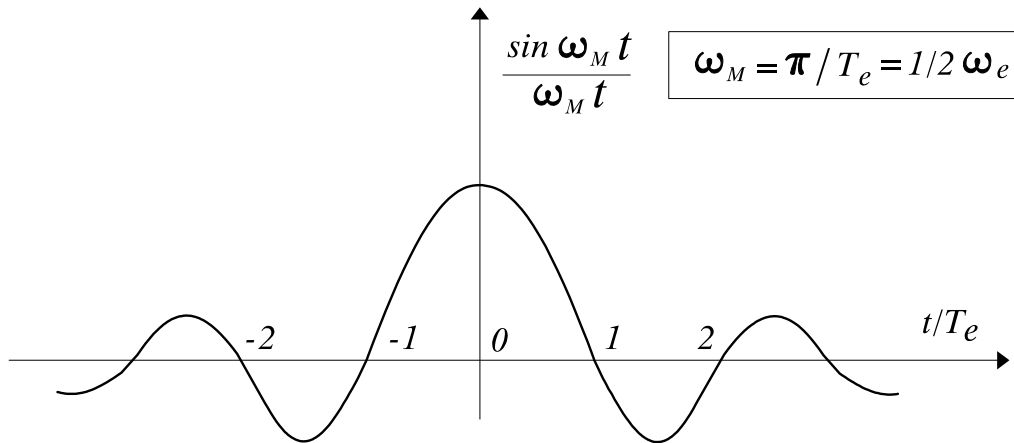


Fig. 3.13 La fonction d'interpolation idéale

La fonction $\sin(\omega_M t)/(\omega_M t)$ est la *fonction d'interpolation idéale* (Fig. 3.13); elle s'annule aux points $t = nT_e$, ce qui confirme l'indépendance des échantillons $f(n)$ dans la reconstruction du signal $f(t)$ (Fig. 3.14).

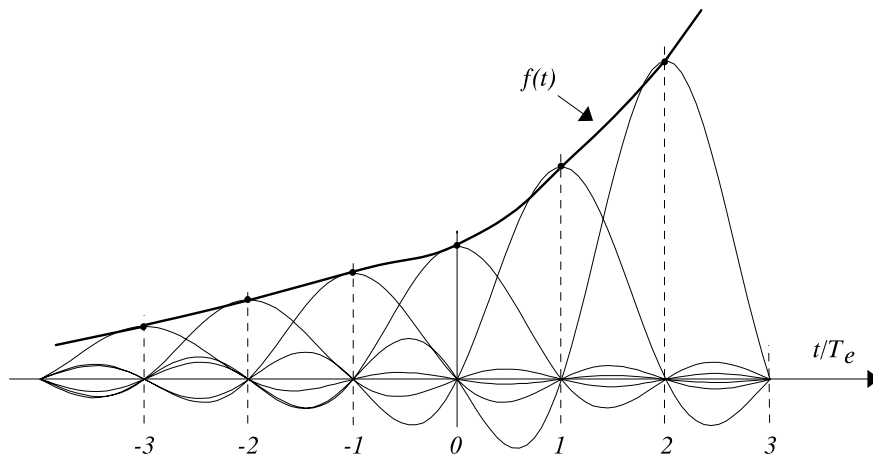


Fig. 3.14 Reconstruction de la fonction $f(t)$

Notons pour terminer que la fréquence $f_e/2$, qui donne la limite supérieure du spectre du signal à échantillonner, est souvent appelée *fréquence de Nyquist*.

Exemple 3.3

Parmi les sinusoïdes examinées à l'exemple précédent, seules celles à 1000 et 2500 Hz respectaient le théorème de Shannon, ce qui explique qu'on puisse retrouver à l'œil les sinusoïdes sous-jacentes à partir des échantillons.

3.5 Reconstruction du signal à temps continu – filtre de lissage

A partir d'un signal à temps discret, on peut vouloir reconstruire un signal à temps continu. En pratique, il est évidemment impossible de filtrer le signal impulsionnel $f^+(t)$, qui n'est qu'une abstraction mathématique utile à la compréhension des phénomènes.

On procède alors en deux étapes :

- On construit un vrai signal analogique $f^*(t)$ à partir des échantillons du signal à temps discret. Cette opération porte le nom d'*extrapolation*. Le signal $f^*(t)$ est en quelque sorte une première ébauche de $f(t)$.
- On fait suivre l'extrapolateur d'un filtre est appelé *filtre de lissage*, qui affine $f^*(t)$ et le rend plus proche de $f(t)$.

Le principe le plus simple de la reconstruction du signal à temps continu consiste en l'utilisation d'un *extrapolateur d'ordre zéro* (en anglais : *sample and hold*) dont le schéma de base est décrit à la Fig. 3.15. On peut, pour mieux comprendre son effet, le considérer comme un filtre de réponse impulsionnelle unitaire de 0 à T_e et nulle partout ailleurs : l'extrapolation de $f(n)$, tout comme le filtrage de $f^+(t)$, conduit à un signal $f^*(t)$ évoluant par paliers.

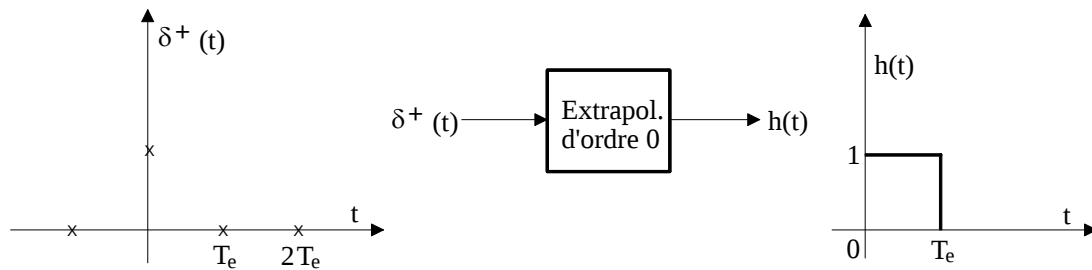


Fig. 3.15 Extrapolateur d'ordre 0

Connaissant la réponse impulsionnelle du filtre équivalent à l'extrapolateur d'ordre 0, on peut calculer sa fonction de transfert et sa réponse en fréquence :

$$H(p) = \frac{1}{p} \cdot (1 - e^{-pT_e}) = \frac{2}{p} \cdot e^{-pT_e/2} \cdot \sinh(pT_e/2) \quad (3.6)$$

ce qui conduit à :

$$H(j\omega) = T_e \cdot e^{-j\omega T_e/2} \cdot \frac{\sin(\omega T_e/2)}{\omega T_e/2} \quad (3.7)$$

Le principe de la reconstitution d'un signal à temps continu à partir d'un signal impulsionnel est alors décrit à la Fig. 3.16. L'examen de l'amplitude spectrale du signal à temps continu montre que l'amplitude spectrale dans la zone utile $(0, f_e/2)$ est déformée par la fonction $\sin(\omega T_e/2)/(\omega T_e/2)$ (qui n'est qu'une pôle

approximation de la fonction de transfert du filtre de lissage idéal) et de plus que des résidus non négligeables des spectres translatés subsistent. Un filtrage passe-bas supplémentaire est donc nécessaire pour éliminer ces résidus dans le spectre: c'est le *filtre de lissage* dont les spécifications sont fort proches de celles du filtre de garde.

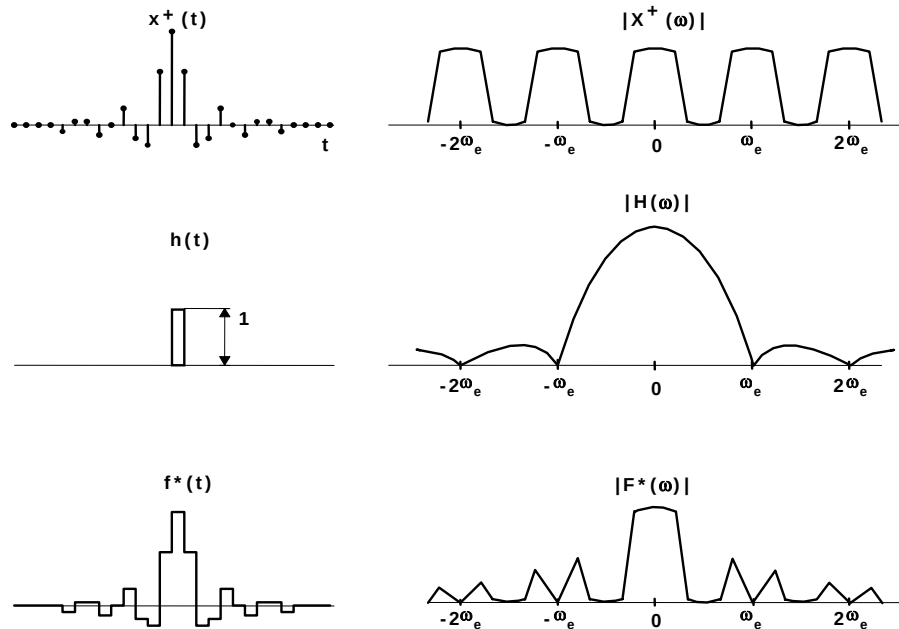


Fig. 3.16 L'extrapolateur d'ordre 0 vu comme un filtre

3.6 Filtre de garde réel

Le filtre de garde idéal est impossible à réaliser en pratique. Pour obtenir une transition aussi radicale entre bande passante et bande atténuée, il faudrait un filtre d'ordre infini. Le filtre garde utilisé en pratique n'est qu'une approximation du filtre idéal (Fig. 3.17), dans laquelle on acceptera de commencer à atténuer le signal à partir d'une fréquence f_M inférieure à $F_e/2$, et où la bande atténuée commencera à une fréquence f_S supérieure à $F_e/2$. En général, cette approximation est bonne pour les fréquences éloignées de la fréquence de coupure du filtre. Par contre, le filtre réel possède une bande de bande de transition de largeur finie, non nulle. Il s'ensuit que le spectre du signal à temps discret obtenu par échantillonnage du signal sortant du filtre de garde différera un peu du spectre du signal analogique de départ autour de f_M , à cause du repliement des composantes résiduelles supérieures à $F_e/2$.

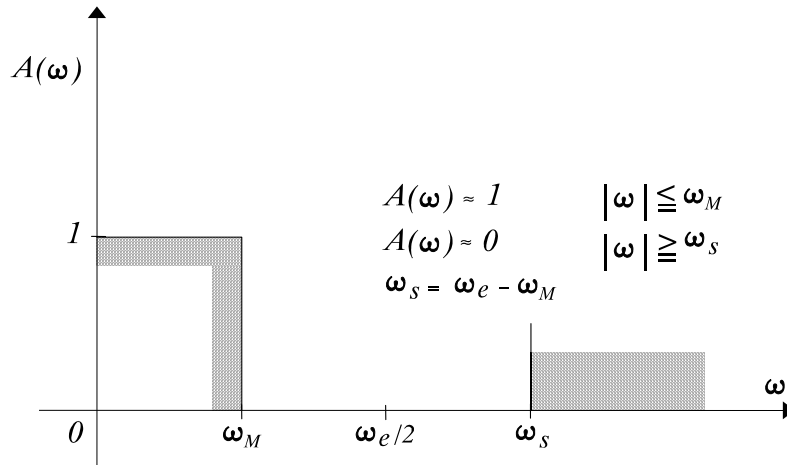


Fig. 3.17 Filtre de garde réel

Cet effet peut être compensé de deux façons :

- Si la fréquence d'échantillonnage est imposée, on peut faire en sorte que la bande passante du filtre de garde soit franchement plus étroite que la limite théorique de $f_e/2$ (ce qui permet d'avoir une bande de transition plus large, et donc, pour un filtre de degré donné, un ripple plus faible en bande passante, et une atténuation plus importante en bande atténuée). Les recouvrements spectraux sont alors minimisés, au prix d'une perte des composantes à plus hautes fréquences du signal.
- Si on a la liberté de choisir la fréquence d'échantillonnage, on peut la choisir fortement supérieure à $2f_M$. En effet, pour une fréquence utile maximale f_M donnée, le filtre de garde est d'autant moins critique que la fréquence d'échantillonnage de départ est choisie supérieure à 2 fois cette fréquence utile : on peut élargir considérablement la zone de transition tout en gardant la même bande utile de fréquence. On paie alors par un nombre d'échantillons plus importants par seconde (et donc plus de calculs pour les traitements numériques qui suivent) le gain obtenu sur les spécifications du filtre de garde.

Dans certains cas, on choisit même d'échantillonner à plusieurs fois la fréquence désirée, ce qui permet de simplifier nettement le filtre de garde. Une fois le signal échantillonné, on procède alors à un sous-échantillonnage par filtrage et décimation. Une partie de la complexité du filtre de garde se trouve ainsi déplacée en numérique, dans le filtre de sous-échantillonnage. Il est en effet nettement plus facile (et moins coûteux) de créer des filtres sélectifs en numérique qu'en analogique.

Exemple 3.4

On cherche comme précédemment à échantillonner la fonction rectangulaire $rect_1(t)$. Si l'on choisit $F_e=10\text{Hz}$, et qu'on choisit comme filtre de garde un filtre passe-bas de degré 1 de fréquence de coupure égale à 5Hz, on demande :

- De vérifier si la valeur maximale de la transformée de Fourier de $rect_1(t)$ est affectée de moins de 1% d'erreur par repliement spectral ;

- Si ce n'est pas le cas, de donner le facteur de sur-échantillonnage minimal pour que cette condition soit respectée (en supposant qu'on ne change pas le filtre de garde).

Le filtre de garde a une pente de 20 dB/décade (degré 1) à partir de 5 Hz. Comme précédemment, on ne considérera que l'effet du premier spectre image, réduit à son enveloppe. L'atténuation du filtre de garde à 10 Hz est de $20\text{dB} \cdot \log(10/5)/\log(10) = 6\text{dB}$. Comme la transformée de Fourier de $\text{rect}_1(t)$ tombe déjà de 30 dB entre $F(0)$ et $F(10)$ (Fig. 3.9), les 6 dB supplémentaires du filtre de garde ne permettent pas vraiment de vérifier la condition demandée (1% = atténuation de 40dB).

On peut refaire le même calcul pour des fréquences d'échantillonnages de 15 (il est clair qu'on ne doit pas aller jusque 30Hz, puisque c'est la valeur qui vérifie la condition *sans filtre de garde*). L'atténuation y est respectivement de $20\text{dB} \cdot \log(15/5)/\log(10) = 9.5\text{dB}$, ce qui fait à peu près 45 dB si on tient compte du fait que $F(15)$ est déjà 35 dB au dessous de $F(0)$. En procédant par approximations successives, on trouve facilement que la fréquence F_e minimale est de 12 Hz : $20\text{dB} \cdot \log(12/5)/\log(10) = 7.6\text{dB}$, qui s'ajoutent aux 32 dB d'écart entre de $F(12)$ et $F(0)$. Le facteur de sur-échantillonnage doit donc être de 1.2.

3.7 Changement de fréquence d'échantillonnage - Décimation – Interpolation

Il arrive que l'on cherche à augmenter ou à diminuer la fréquence d'échantillonnage d'un signal *déjà* échantillonné. Nous nous intéresserons ici au cas le plus courant : celui d'une division ou de la multiplication de la fréquence d'échantillonnage par un nombre entier.

3.7.1 Décimation – Sous-échantillonnage (downsampling)

Considérons un signal $x_1(n)$ obtenu par échantillonnage d'un signal analogique $x(t)$ à une fréquence d'échantillonnage valant F_e . En vertu de ce qui a été dit plus haut, le spectre utile du signal est limité à l'intervalle $[0, F_e/2]$; un filtre de garde veille d'ailleurs normalement à ce que cet intervalle ne soit pas perturbé par du repliement spectral.

Sous-échantillonner ce signal à une fréquence k fois inférieure correspond en principe à ne retenir qu'un échantillon de $x_1(n)$ sur k dans $x_2(n)$, à *décimer* $x_1(n)$ par k (Fig. 3.18) :

$$x_2(n) = x_1(kn) \quad (3.8)$$

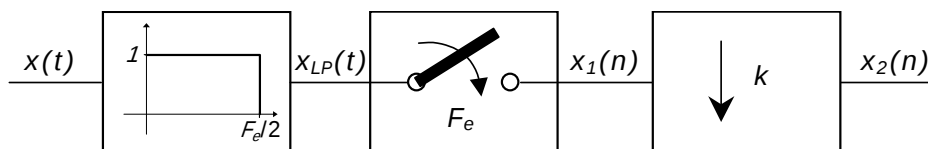


Fig. 3.18 Sous-échantillonnage par décimation brutale d'un signal numérique $x_1(n)$

Ceci pose cependant un problème important : le résultat de l'échantillonnage de $x(t)$ à F_e suivi d'un second échantillonnage à F_e/k est évidemment équivalent à un échantillonnage direct à F_e/k : le spectre du signal décimé est celui du signal analogique de départ, rendu périodique de période F_e/k , et dont l'amplitude spectrale est divisée par kT_e (ce qui constitue donc une division par k par rapport au spectre du signal échantillonné à F_e). Or, comme le filtre de garde a été prévu pour un échantillonnage à F_e , la décimation par k introduit, au niveau de la TFTD

de $x_2(n)$, un repliement spectral des composantes de $x_1(n)$ situées entre $F_e/2k$ et $F_e/2$. Il est donc nécessaire de faire précéder la décimation d'un filtre *numérique* (au contraire du filtre de garde, analogique) passe-bas jouant le rôle d'un « adaptateur de filtre de garde », de fréquence de coupure $F_e/2k$ (Fig. 3.19)

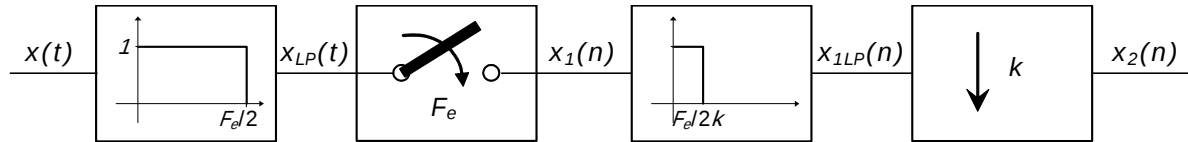


Fig. 3.19 Sous-échantillonnage par filtrage et décimation

3.7.2 Interpolation – Sur-échantillonnage (upsampling)

Pour sur-échantillonner (au sens du mot anglais « up-sampling ») le signal $x_1(n)$ à une fréquence k fois supérieure, il faut calculer $k-1$ échantillons intermédiaires entre deux échantillons connus de $x_1(n)$. Ce calcul est possible : en vertu du théorème de Shannon, il est même possible de reconstituer complètement $x_{LP}(t)$ en utilisant l'interpolateur idéal.

Le calcul des $k-1$ échantillons intermédiaires de $x_{LP}(t)$ se fait en pratique de la manière suivante : on commence par interpoler de façon brutale en insérant $k-1$ échantillons nuls aux endroits requis :

$$\begin{aligned} x_2(n) &= x_1(n/k) \quad (n \text{ multiple de } k) \\ x_2(n) &= 0 \quad (n \text{ non multiple de } k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Cette opération ne change en rien la TFTD du signal interpolé $x_2(n)$, qui reste périodique de période F_e . Par contre, le spectre utile de ce signal s'étend maintenant de 0 à $kF_e/2$. Ce spectre fait donc apparaître des composantes de $x_1(n)$ qui ne sont pas présentes dans $x_{LP}(t)$ (Fig. 3.20, où l'on a expressément représenté les TFTD en fréquence vraie, non normalisée).

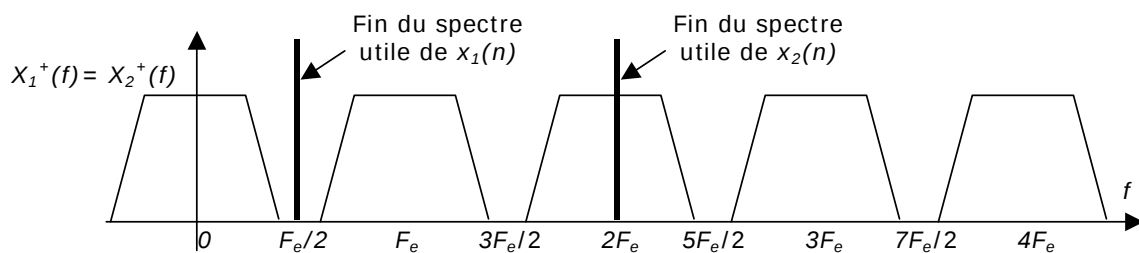


Fig. 3.20 Effet spectral de l'interpolation par insertion de zéros (exemple : $k=4$)

Ces composantes perturbatrices peuvent être éliminées en faisant suivre l'interpolation par un filtre passe-bas *numérique* de fréquence de coupure égale à $F_e/2$.

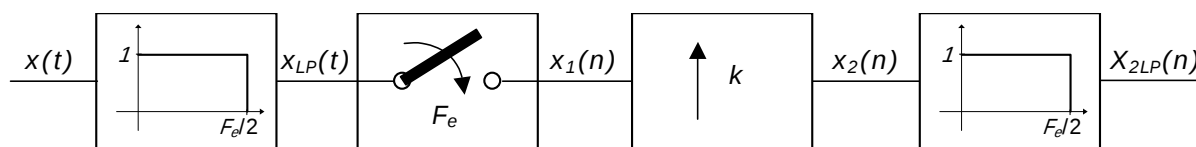


Fig. 3.21 Sur-échantillonnage par interpolation et filtrage

On notera que les filtres numériques utilisés pour sous- et sur-échantillonner par un facteur k sont en réalité identiques. En effet, leur fréquence de coupure *normalisée* (rapport de la fréquence de coupure à la fréquence d'échantillonnage des signaux d'entrés et de sortie) vaut dans les deux cas $1/2k$.

3.8 Filtre de lissage réel – Sur-échantillonnage (oversampling)

Le filtre de lissage peut également se trouver grandement simplifié par l'utilisation d'une fréquence d'échantillonnage intermédiaire, supérieure à la fréquence de départ, avant l'extrapolateur. On l'obtient facilement par interpolation (up-sampling), ce qui implique une certaine charge de calcul au niveau du filtre numérique, que l'on gagne en simplification du gabarit du filtre de lissage.

Exemple 3.5 – Application : Sur-échantillonnage dans un lecteur de CD Audio

Le sur-échantillonnage est souvent utilisé dans l'étage de sortie des lecteurs de CD audio. La Fig. 3.22 illustre les contraintes sur le filtre de lissage sans et avec sur-échantillonnage. ⁵ On constate que la zone de transition du filtre est beaucoup plus large dans le second cas.

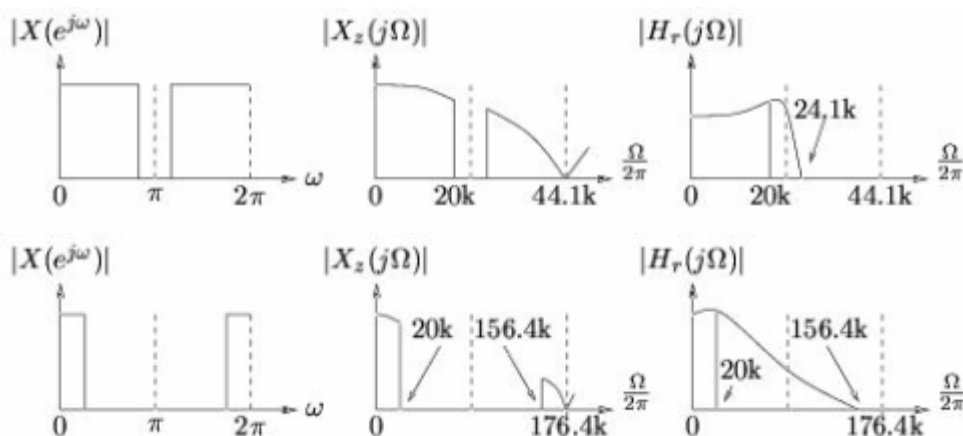


Fig. 3.22 a. Réponse en fréquence typique pour le filtre de lissage dans l'étage DAC d'un lecteur de CD, sans sur-échantillonnage (haut) et avec sur-échantillonnage d'un facteur 4 (bas) [d'après Phil Shniter, *Digital Signal Processing*, <http://cnx.rice.edu/content/m11006/latest/>].

⁵ Paradoxalement, l'industrie du lecteur de CD se sert même du sur-échantillonnage comme un argument commercial.

3.9 Théorème de Shannon généralisé

Le théorème de SHANNON peut être généralisé pour les signaux à bande étroite, c'est-à-dire pour les signaux pour lesquels l'amplitude spectrale se trouve confinée dans une bande de fréquence de largeur B centrée autour de f_0 (Fig. 3.23).

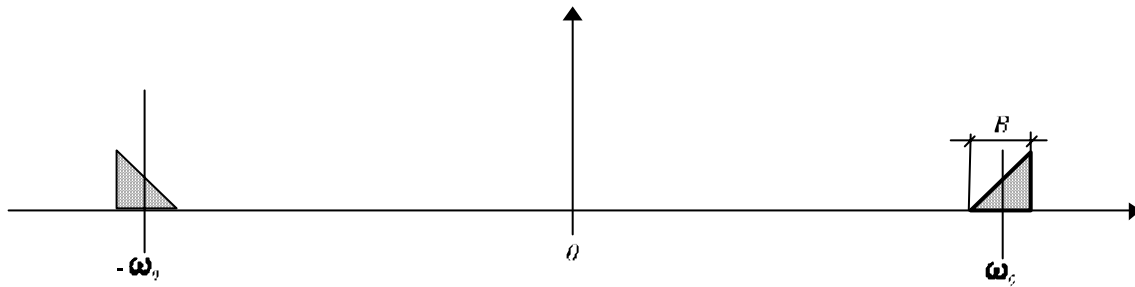


Fig. 3.23 Signal à bande étroite

Imaginons que l'on échantillonne un tel signal à une fréquence telle que $Kf_e = f_0 - B/2$ ou $Kf_e = f_0 + B/2$, avec K entier (Fig. 3.24 et Fig. 3.25). On constate que des spectres image apparaissent de part et d'autre du spectre initial, mais que le recouvrement spectral est nul tant que $f_e \geq 2B$. Le signal original peut donc être reconstitué par le passage du signal impulsionnel $f^+(t)$ dans un filtre passe-bande idéal dont les fréquences de coupure sont $f_{c\pm} = f_0 \pm B/2$.

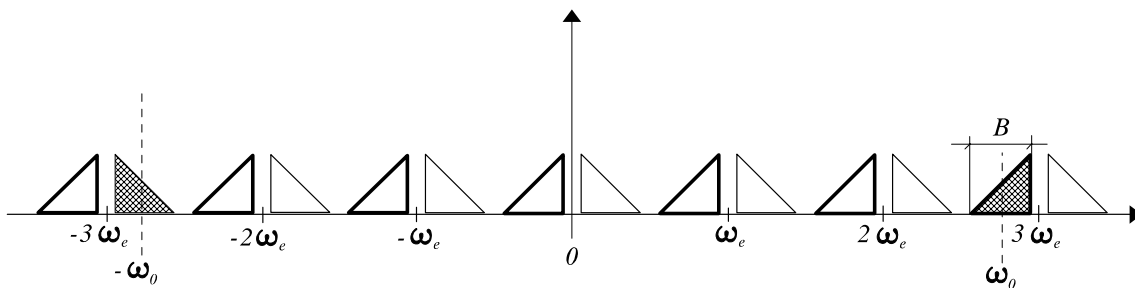


Fig. 3.24 Signal à bande étroite échantillonné avec
 $3f_e = f_0 + B/2$

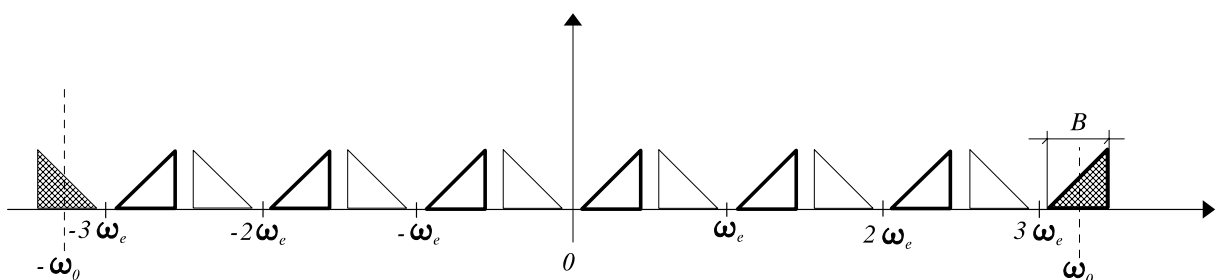


Fig. 3.25 Signal à bande étroite échantillonné avec
 $3f_e = f_0 - B/2$

La fréquence d'échantillonnage nécessaire est donc fonction de la largeur effective B et non de la valeur centrale f_0 (comme on aurait pu s'y attendre avec la version simple du théorème de Shannon) :

"Toute fonction $f(t)$ dont le spectre est à bande étroite (f_0, B) est complètement définie par ses échantillons $f(nT_e)$ si $f_e \geq 2B$ et que f_e respecte en outre l'une des conditions suivantes : $Kf_e = f_0 - B/2$ ou $Kf_e = f_0 + B/2$, avec K entier "

On peut noter en passant que les signaux dont les spectres sont donnés à la Fig. 3.24 et la Fig. 3.25 sont identiques à ceux que l'on aurait obtenus en translatant tout d'abord le spectre du signal de Kf_e (obtenant ainsi un signal analogique à basse fréquence, entre 0 et $f_e/2$, et en échantillonnant ce signal à f_e . La reconstruction du signal de départ implique donc bien entendu de se souvenir que le signal, avant échantillonnage, avait son spectre dans l'intervalle $f_0 \pm B/2$

Exemple 3.6 – Application : Analyse en sous-bandes

Le théorème de Shannon généralisé est mis à profit dans les systèmes dit *d'analyse en sous-bandes*, où un signal de départ est décomposé, par filtrage passe-bande, en plusieurs signaux à bande étroite, dont la somme fournit le signal de départ. Ces signaux sont alors échantillonnés séparément en respectant le théorème de Shannon généralisé. Ceci permet de transformer un flux d'échantillons de départ (large-bande, de largeur de bande f_M donnée) en N flux à bande étroite (f_M/N) en conservant le débit total en nombre d'échantillons par seconde.

Ainsi par exemple, le signal $x(t)$ dont le spectre $A(f)$, de largeur f_M , est donné à la Fig. 3.26 est décomposé en deux sous-bandes $A_1(f)$ et $A_2(f)$ de largeur $f_M/2$. Les deux signaux analogiques $x_1(t)$ et $x_2(t)$ correspondants sont tous deux échantillonnés à une fréquence d'échantillonnage f_e égale à f_M . L'échantillonnage de $x_1(t)$ respecte donc le théorème de Shannon, et celui de $x_2(t)$ respecte le théorème de Shannon généralisé. Les deux signaux numériques correspondants $x_1(n)$ et $x_2(n)$ portent bien la même information que le signal $x(n)$ qui aurait été obtenu par échantillonnage direct de $x(t)$ à une fréquence d'échantillonnage f_e égale à $2f_M$ (pour respecter le théorème de Shannon sur l'échantillonnage de ce signal). Le nombre total d'échantillons utilisés pour stocker cette information dans $x_1(n)$ et $x_2(n)$ est bien identique à celui utilisé dans $x(n)$.

En pratique, la décomposition en sous-bandes est généralement réalisée directement dans le domaine numérique. Pour l'exemple ci-dessus, on échantillonne $x(t)$ à $f_e = 2f_M$, puis on décompose par filtrage le spectre de $x(n)$ en deux sous-bandes ($[0, f_M/2]$, $[f_M/2, f_M]$), et on décime les deux signaux numériques $x_L(n)$ et $x_H(n)$ ainsi obtenus par 2, pour obtenir $x_1(n)$ et $x_2(n)$ (Fig. 3.27). Le signal $x_1(n)$ peut être vu comme une « approximation grossière », basse-fréquence, de $x(n)$, tandis que $x_2(n)$ porte au contraire les détails haute-fréquence du signal. La même opération peut alors être répétée sur $x_1(n)$ et $x_2(n)$ séparément, ce qui conduit à une décomposition récursive en un nombre de sous-bandes de plus en plus élevé, et de fréquence d'échantillonnage de plus en plus faible. Ce type de décomposition est utilisé par exemple pour le codage d'images selon la norme JPEG2000, ainsi que pour le codage/décodage selon la norme MPEG1-layer3 (plus communément appelée mp3).

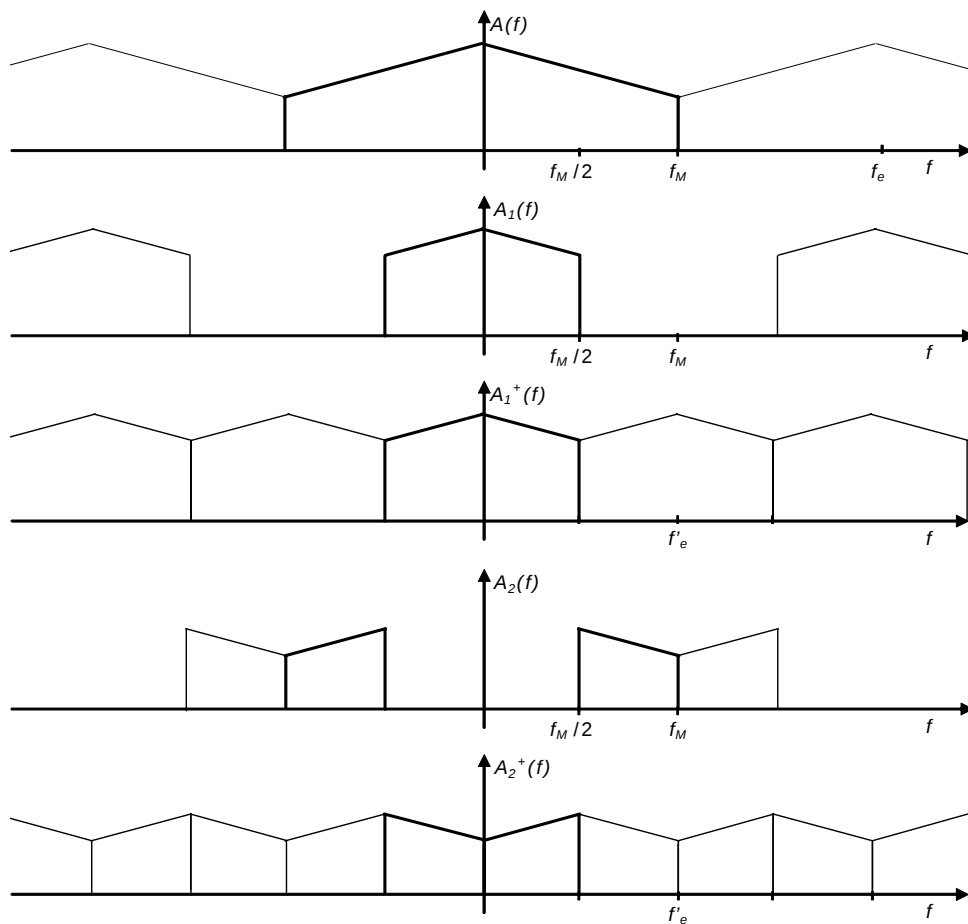


Fig. 3.26 Effet spectral de la décomposition d'un signal en 2 sous-bandes. En gras, la bande de fréquence utile ($-f_e/2 \rightarrow f_e/2$).

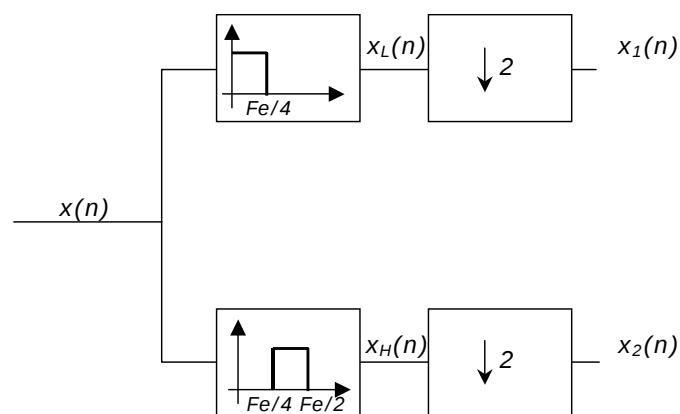


Fig. 3.27 Décomposition numérique en sous-bandes.